

طريقة الفروق المقسومة:

تعتمد هذه الطريقة على جداول فروق من نوع آخر تدعى جداول الفروق المقسومة. تستخدم هذه الطريقة في حالة تكون فيها المسافات بين نقاط الاستيفاء ومتساوية أو غير متساوية.

لنوضح الآن جداول الفروق المقسومة.

★ جداول الفروق المقسومة:

نفرض أن الدالة $y = f(x)$ تأخذ عند النقاط $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ القيم $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$.

• إن الفروق المقسومة من المرتبة الأولى هي الفروق المتتالية:

$$D y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = (x_0, x_1) = (x_1, x_0)$$

$$D y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = (x_1, x_2)$$

$$D y_{n-1} = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = (x_{n-1}, x_n)$$

وهي متناظرة بالنسبة لمحور التناظر.

• أما الفروق المقسومة من المرتبة الثانية فهي الفروق التالية:

$$D^2 y_0 = \frac{(x_1, x_2) - (x_0, x_1)}{x_2 - x_0} = (x_0, x_1, x_2)$$

$$D^2 y_1 = \frac{(x_2, x_3) - (x_1, x_2)}{x_3 - x_1} = (x_1, x_2, x_3)$$

$$D^2 y_{n-2} = \frac{(x_{n-1}, x_n) - (x_{n-2}, x_{n-1})}{x_n - x_{n-2}} = (x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$$

• المقسومة من المرتبة الثالثة:

$$D^3 y_0 = \frac{(x_1, x_2, x_3) - (x_0, x_1, x_2)}{x_3 - x_0} = (x_0, x_1, x_2, x_3)$$

SUBJECT:

$$D_{y_{n-3}}^3 = \frac{(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) - (x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1})}{x_n - x_{n-3}} = (x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$$

← والفروق من المرتبة n تكون عدد واحد فقط.

• لنكتب الآن جدول للفروق المقسومة لعدد محدود من النقاط بالشكل التالي:

x_i	y_i	D_{y_i}	$D_{y_i}^2$	$D_{y_i}^3$	$D_{y_i}^4$
x_0	y_0				
x_1	y_1	(x_0, x_1)	(x_0, x_1, x_2)	(x_0, x_1, x_2, x_3)	$(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$
x_2	y_2	(x_1, x_2)	(x_1, x_2, x_3)	(x_1, x_2, x_3, x_4)	
x_3	y_3	(x_2, x_3)	(x_2, x_3, x_4)		
x_4	y_4	(x_3, x_4)			

• لنكتب الآن المبرهنات التي تبين العلاقة التي تربط المشتقات بالفروق المقسومة.

مبرهنة:

لنفرض أن الدالة $y = f(x)$ قابلة للتفاضل n مرة متتالية على المجال $[a, b]$ الذي يحوي نقاط الاستيفاء $x_i, i \leq n$ عند ذلك توجد نقطة ضمن هذا المجال بحيث يكون:

$$D_{y_0}^n = (x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}, \quad \alpha \in [a, b]$$

• تدل هذه المشتقات في منشور تايلور بما يقابلها في الفروق المقسومة نحصل على كثير حدود الاستيفاء.

SUBJECT:

فنجدر: أن كثير الحدود الاستيفاء بطريقة الفروق المقسومة يكتب بالشكل:

$$P_n(x) = y_0 + (x-x_0)Dy_0 + (x-x_0)(x-x_1)D^2y_0 + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)D^3y_0 + \dots + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})D^ny_0$$

بحسب الخطأ المركب كما في الطريقة السابقة:

$$R(x) = \frac{w(x)}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\alpha) ; \alpha \in [a, b]$$

$$R(x) \leq \frac{w(x)}{(n+1)!} \cdot \max_{\alpha \in [a, b]} f^{(n+1)}(\alpha) ; \alpha \in [a, b]$$

- عندما $f^{(n+1)}(\alpha) = 0$ فإن $R(x) = 0$ ويكون $R(x)$ مساوي لقيمة الفطمة عندما يكون $f^{(n+1)}$ ثابت.
- عندما تكون الدالة مغطاة تحليلياً فنشتق عدد كافٍ من المرات ونوض في عبارة الخطأ المركب وهو فنحصل على القيمة الفطمة للخطأ المركب.

إذا كانت الدالة مجهولة أو مغطاة جبرياً ببدل المشتق في عبارة الخطأ المركب عبارة له من الفروق المقسومة من المبرصت السابقة وبالتالي بعد التبديل يصبح إيجاد الخطأ المركب في غاية البساطة.

x_i	-2	-1	0	1	2	مثال:
y_i	-3	2	1	0	5	

Dy_i D^2y_i D^3y_i D^4y_i D^5y_i

-2	-3				
		5			
-1	2		-3	1	
0	1	-1	0		0
1	0	-1	3	1	0
2	5	5	6	1	0

AL DOUHA

(3)

(22)

(17)

(6)

(1)

(0)

RM

يجب أن تكون درجة كثير حدود الاستيفاء من الدرجة الرابعة حسب نقاط الاستيفاء 5،
 $\leftarrow 0 = D^4 y_i$ فهي من الدرجة الثالثة.

$$P_3(x) = y_0 + (x-x_0) D y_0 + (x-x_0)(x-x_1) D^2 y_0 + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) D^3 y_0$$

$$\begin{aligned} &= -3 + (x+2)5 + (x+2)(x+1)(-3) + (x+2)(x+1)(x)(1) \\ &= -3 + 5x + 10 - 3x^2 - 9x - 6 + x^3 + 3x^2 + 2x \end{aligned}$$

$$P_3(x) = x^3 - 2x + 1$$

$$R(x) \leq \frac{w(x)}{(n+1)!} \max f^{(n+1)} = \frac{w(x)}{5!} \max f^{(5)}$$

$$= \frac{w(x)}{5!} \max(5!) \cdot D^5 y_i$$

$$R(x) \leq w(x) \cdot D^5 y_i \quad \text{نحصل على } D^5 y_i \text{ نقطة}$$

$$R(x) = 0$$

الدالة متطابقة الحدود الاستيفاء

طريقة لاغرانج:

- تطبق هذه الطريقة عندما تكون المسافات بين نقاط الاستيفاء متساوية أو غير متساوية.
 وتستخدم على مضارب تدعى مضارب لاغرانج ولا تعتمد على أي نوع من جداول الفروق.
 فإذا كانت لدينا الدالة $y = f(x)$ ولنفرض أن كثيرة حدود الاستيفاء من الدرجة n بالشكل التالي:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

التقريب الخطي "من الدرجة الأولى":

لتقرب الدالة $y = f(x)$ من كثيرة حدود خطية من الشكل:

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x$$

وفقاً للعلاقة الاستيفاء يكون:

$$P_1(x_i) = y_i$$

ومن المعلوم أن: $y = a_0 + a_1 x$ هي معادلة مستقيمة يتعين في المستوى بنقطتين على الأقل هما: (x_0, y_0) و (x_1, y_1) وفقاً للعلاقة الاستيفاء:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 = y_1 \end{cases}$$

وصحابة عن معادلتين خطيتين مجهولتين a_0, a_1 بحلها المشترك نجد a_0, a_1 على الشكل التالي:

$$a_0 = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{x_0 - x_1}, \quad a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

بتبديل هاتين المعادلتين:

$$P_1(x) = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{x_0 - x_1} + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x$$

$$P_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$$

$$P_1(x) = L_0(x) y_0 + L_1(x) y_1$$

لنأخذ الآن كثير الحدود من الدرجة الثانية:

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

وهي معادلة قطع مكافئ ويتعين على الأقل معرفة 3 نقاط $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ وفقاً للعلاقة الاستيفاء:

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 = y_0$$

$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 = y_1$$

$$a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 = y_2$$

وهنا عبارة عن جملة 3 معادلات خطية بالمجهول a_0, a_1, a_2 وبالمثل المستعمل بالطرائق المعروفة بالجبر الخطي. نحصل على a_0, a_1, a_2 و بالتبديل نحصل على كثيرة حدود الاستيفاء بعد ترتيب الحدود التي تتوحد y_0, y_1, y_2 .

$$P_2(x) = L_0(x) y_0 + L_1(x) y_1 + L_2(x) y_2$$

حيث:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \quad \text{و} \quad L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

بنفس المبدأ يمكننا إيجاد كثيرة حدود من الدرجة الرابعة والخامسة.

كثيرة حدود الاستيفاء من الدرجة "n":

$$P_n(x) = L_0(x) y_0 + L_1(x) y_1 + \dots + L_n(x) y_n = \sum_{i=0}^n L_i(x) y_i$$

حيث:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2) \dots (x_0-x_n)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2) \dots (x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2) \dots (x_1-x_n)}$$

$$L_n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1) \dots (x_n-x_{n-1})}$$

هكذا حتى:

وحساب الخطأ المركب:
إذا كانت الدالة المعطاة تحليلياً نشق عدد كاف من المرات ونفرض في عبارة الخطأ المركب فنحصل على القيمة العظمى للخطأ المركب.

أما إذا كانت الدالة معطاة جدولياً فلا يمكننا حسابها تماماً كما يمكننا تبديل الفروق "يؤجل إلى فصل حساب التقريب للمشتقات -"

عندما تكون الدالة معطاة جدولياً.
نحسب المشتقة بطريقة تقريبية ثم نبدل تلك القيمة التقريبية للمشتقة فنحصل على
الخطأ المتركب.

لنوجد كثيرة الحدود الاستيفاء بطريقة لاغرانج الموافقة للدالة.

x_i	x_0	x_1	x_2	x_3
	-2	-1	0	1
y_i	-3	2	1	0
	y_0	y_1	y_2	y_3

$$p_3(x) = h_0(x) y_0 + h_1(x) y_1 + h_2(x) y_2 + h_3(x) y_3$$

$$h_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{-6}$$

$$h_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{1}{2}(x+2)(x)(x-1)$$

$$h_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = -\frac{1}{2}(x+2)(x+1)(x-1)$$

$$h_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{1}{2}$$

وبالتالي يكون:

$$p_3(x) = \frac{1}{2}(x^3 - x) + (x^3 + x^2 - 2x) - \frac{1}{2}(x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x - 1)$$

$$= x^3 - 2x + 1$$

- إذا كان $f(x) = x^3 - 2x + 1$ فإن: $R = 0 \Leftrightarrow f^{(n)}(x) = 0$.
الدالة تطابق كثير الحدود.

طريقة المربعات الصغرى:

تتحد على جعله مربعات الفرق ما بين الدالة وكثير الحدود أصغرياً وتطبق في الحالة

عندما تكون الملاحظات متساوية أو غير متساوية.
 لنفرض أن $y_i = f(x_i)$ ولناول تقريبا من كثير حدود:
 $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$
 لنبدأ التقريب الخطي.

التقريب الخطي:

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x$$

يجب أن يكون مربعات الفرق بين الدالة:
 $\min \sum_{i=0}^n [y_i - (P_1 x_i)]^2$

$$= \min_{a_0, a_1} \sum_{i=0}^n [y_i - (a_0 + a_1 x_i)]^2 \quad E(a_0, a_1)$$

ومن المعروف إذا كانت لدينا دالة تابعة لـ n من المتغيرات فإن هذه الدالة تتبلغ قيمة
 حدية صغرى عندما جميع المشتقات الجزئية لتلك الدالة بالنسبة لجميع متغيراتها
 تساوي الصفر.

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = 0 \Rightarrow -2 \sum_{i=0}^n [y_i - (a_0 + a_1 x_i)] = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_1} = 0 \Rightarrow -2 \sum_{i=0}^n [y_i - (a_0 + a_1 x_i)] x_i = 0$$

عدد نقاط الاستيفاء:

$$(n+1)a_0 + a_1 \sum_{i=0}^n x_i = \sum_{i=0}^n y_i$$

$$a_0 \sum_{i=0}^n x_i + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^2 = \sum_{i=0}^n x_i y_i$$

بالكامل المشترك لنحصل على a_0, a_1 وبالتبديل في $P(x)$ نحصل على تقريب المربعات
 الصغرى الخطي.

SUBJECT:

لنوجد كثيرة الحدود الاستيفاء للدالة المعطاة بالجدول.

x_i	-2	-1	0	1
y_i	-3	2	1	1

$$(n+1)a_0 + a_1 \sum x_i = \sum y_i$$

$$a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 = \sum x_i \cdot y_i$$

$$\Rightarrow 3a_0 - 3a_1 = 0 \Rightarrow a_0 = a_1$$

$$-3a_0 + 5a_1 = 4$$

$$\Rightarrow a_0 - a_1 = 2$$